Beiträge zur Theorie

von

Apparaten zur Anfertigung von Mikrometerschrauben.

Inaugural-Dissertation

der

philosophischen Fakultät der Universität München

zur Erlangung der Doctorwürde

vorgelegt

von

Julius Werther

aus Breslau.

1894

Beiträge zur Theorie

von

Apparaten zur Anfertigung von Mikrometerschrauben.

Inaugural-Dissertation

der

philosophischen Fakultät der Universität München

zur Erlangung der Doctorwürde

vorgelegt

von

Julius Werther

aus Breslau.

Sonder-Abdruck aus der „Zeitschrift für Instrumentenkunde“ 1894, November u. Dezember.

Verlag von Julius Springer, Berlin N.

Seiner teuren Mutter

in Liebe

gewidmet

vom

Verfasser.

Nachdem im Jahre 1883 die Mechaniker Bamberg und Wanschaff eine Beschreibung ihrer Apparate zur Anfertigung von Mikrometerschrauben in der *Zeitschrift für Instrumentenkunde 1883 S. 238* und *350* veröffentlicht hatten, erschien daselbst im gleichen Jahre (*S. 427*) eine Kritik dieser Vorrichtungen, welche von Herrn Dr. Leman geschrieben und betitelt war: „Bemerkungen zu den Aufsätzen der Herren Bamberg und Wanschaff über Apparate zur Anfertigung von Mikrometerschrauben."

Da seitdem keine wissenschaftlichen Beiträge zu den hier berührten Fragen geliefert worden sind, die Fragen selbst aber in einer Zeit, die sich mit der Regelung und Herstellung von Mikrometerschrauben vielfach beschäftigt, nur an Interesse gewonnen haben können, so dürfte ein weiteres Eingehen auf die Ausführungen des Herrn Prof. Leman nicht unwillkommen sein.

I.

Im ersten Theile seiner Abhandlung untersuchte Leman, welche Fehler in der Funktionirung des Wanschaff'schen Apparates dadurch entstehen könnten, dass die Axen der Normalschraube und der Werkspindel nicht mathematisch zusammenfielen; also um den Fall zu verallgemeinern, er untersuchte den Drehungsunterschied zweier durch Herzstück und Mitnehmer gekuppelten Axen. Da die Methode, nach welcher dieser Umdrehungsfehler mathematisch festgestellt wurde, sehr einfach ist, so erlaube ich mir, an der Hand der perspektivisch gedachten Leman'schen Figur die Entwicklung vorzunehmen.

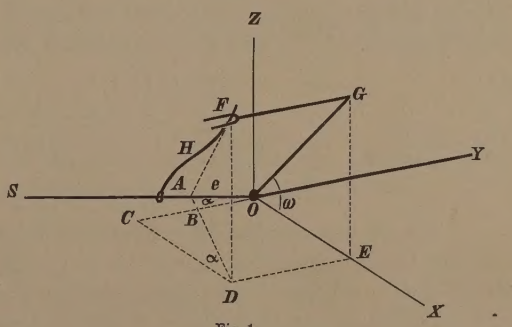

Fig. 1.

OY (Fig. 1) ist die Axe der Normalschraube, *OS* die der Werkspindel, *OX* und *OZ* bilden mit der ersteren ein rechtwinkliges Koordinatensystem. *H* ist das an *OS* unter beliebigem Winkel angebrachte Herzstück, *OG* der Radius *r* des Mitnehmers; *FG* ist ∥ *OY* und berühre *H* in *F*. *OG* bewege sich in der Ebene *XOZ*.

Ferner bedeute FAD eine durch F senkrecht zu OS gelegte Ebene, AD deren Schnittlinie mit der XY-Ebene, B den Schnittpunkt dieser Linie mit der Verlängerung von OY und D den Punkt der XY-Ebene senkrecht unter F. Ist nun GOX der $\angle\,\omega$, um welchen sich die Normalschraube gedreht haben mag, so hat sich die Werkspindel um $\angle\,FAD = \omega_1$ gedreht; und wenn nun $CD \parallel$ zur X-Axe, DE zur Y-Axe und EG zur Z-Axe gezogen werden, so ergeben sich als Koordinaten des Punktes F:

$$CD = OE = x, \quad ED = OC = y, \quad DF = EG = z.$$

OS und OY mögen den $\angle\,\alpha$ bilden. Da nun $\angle\,CDB$ auch $= \alpha$ ist, so stellte Leman die Gleichung auf:

$AD = x \cos\alpha + e \sin\alpha$, worin e das Stück AO bezeichnet.

Diese Gleichung ist nicht richtig; zwar ist es sehr wohl erlaubt, anstatt der Tangente des sehr kleinen $\angle\,\alpha$ dessen Sinus einzusetzen, doch ist BD nicht Kathete, sondern Hypotenuse des Dreiecks BCD, also $= x/\cos\alpha$.

Um eine neue Gleichung für den Drehungsfehler $(\omega_1 - \omega)$ aufzustellen, setzen wir daher:

$$AD = \frac{x}{\cos\alpha} + e\,tg\alpha \text{ und } tg\omega_1 = \frac{FD}{AD} = z; \quad \frac{x}{\cos\alpha} + e\,tg\alpha = \frac{z\cos\alpha}{x + e\sin\alpha} = \frac{r\sin\omega\cos\alpha}{r\cos\omega + e\sin\alpha}.$$

Führen wir mit Leman $m = e/r$ ein, so ist:

$$tg\omega_1 = \frac{\sin\omega\cos\alpha}{\cos\omega + m\sin\alpha}; \quad \frac{tg\,\omega}{tg\,\omega_1} = \frac{\cos\omega + m\sin\alpha}{\cos\omega\cos\alpha},$$

$$1 - \frac{tg\,\omega}{tg\,\omega_1} = 1 - \frac{1}{\cos\alpha} - \frac{m\,tg\,\alpha}{\cos\omega}.$$

Multipliziren wir nun die Gleichung mit $\cos\omega$ und bringen die linke Seite auf den gemeinsamen Nenner $\sin\omega_1$, so können wir schreiben:

$$\sin(\omega_1 - \omega) = \sin\omega_1\,[(1 - 1/\cos\alpha)\cos\omega - m\,tg\,\alpha] = z\sin\{\omega + (\omega_1 - \omega)\},^{1})$$

worin z den äusserst geringen Werth des Klammerausdrucks darstelle.

$$\sin(\omega_1 - \omega) = z\,[\sin\omega\cos(\omega_1 - \omega) + \cos\omega\sin(\omega_1 - \omega)]$$

Angenähert ist also:

$$(\omega_1 - \omega) - (\omega_1 - \omega)^3/6 = z\sin\omega\{1 - (\omega_1 - \omega)^2/2\} + z\cos\omega\{(\omega_1 - \omega) - (\omega_1 - \omega^3)/6\}$$

Begnügen wir uns mit einer weiteren Annäherung, indem wir die zweite und dritte Potenz des sehr kleinen Werthes $(\omega_1 - \omega)$, sowie das Produkt desselben mit der kleinen Grösse z vernachlässigen, so bleibt als Ausdruck für den Drehungsunterschied die Gleichung: $\omega_1 - \omega = z\sin\omega$, oder wenn ich den Werth für z einsetze:

1a) $$\omega_1 - \omega = \sin\omega\left\{\left(1 - \frac{1}{\cos\alpha}\right)\cos\omega - m\,tg\,\alpha\right\},$$

1b) oder: $$\omega_1 - \omega = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\cos\alpha}\right)\sin 2\omega - m\,tg\,\alpha\sin\omega.$$

$$\text{Nun ist } 1 - \frac{1}{\cos\alpha} = \frac{\cos\alpha - 1}{\cos\alpha} = -\frac{2\sin^2\alpha/2}{\cos\alpha}.$$

Da wir den Nenner $\cos\alpha$ vernachlässigen dürfen, so weicht unsere Gleichung von der Leman'schen nur durch das Vorzeichen des ersten Gliedes ab. Es haben sich für $\omega_1 - \omega$ zwei Summanden ergeben, deren einer ausser von ω auch noch von m abhängig ist und daher durch geeignete Wahl des Mitnehmers zu Null werden kann.

---

[1]) Ich musste davon absehen, mich der Leman'schen Entwicklung anzuschliessen, weil sie auf einer Anwendung der Taylor'schen Reihe beruht, deren Glieder in diesem Falle für $\omega = 0$ und $180° \infty$ gross werden, also die Herleitung unstatthaft machen.

Aus der Gleichung leuchtet zunächst Folgendes ein:

Die Ungleichförmigkeit wächst für einen bestimmten $\angle \omega$ mit zunehmendem $\angle \alpha$ und verschwindet, sobald $\alpha = 0$ ist.

Für $\angle \alpha > 0$ verschwindet sie, wenn $\omega = 0$ bezw. 180° ist und für den Fall, dass

$$m \sin \alpha = \cos \omega (\cos \alpha - 1) \text{ oder } \cos \omega = \frac{-m \sin \alpha}{1 - \cos \alpha} \text{ ist.}$$

Führe ich statt dieses Winkels ω die Bezeichnung ω° ein, so kann ich statt der letzten Gleichung schreiben:

2) $$\cos \omega^\circ = -m \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}.$$

Soll Gleichung 2 reell werden, so muss $m \operatorname{ctg} \alpha/2$, absolut betrachtet, zwischen 0 und 1 liegen. Wir sehen ferner, dass der $\cos \omega^\circ$ positiv wird für ein negatives m, negativ für ein positives m und können daher folgenden Satz aufstellen:

Der Umdrehungsfehler verschwindet stets bei einer Drehung um $\omega = 0^\circ$ bezw. 180°. Wenn aber m und α geeignet gewählt werden, so nämlich, dass der absolute Werth von $m \operatorname{ctg} \alpha/2$ zwischen 0 und 1 liegt, so wird die Ungleichförmigkeit zwischen $\omega = 0$ und 180°, sowie zwischen 180 und 360° noch einmal $= 0$; und zwar geschieht dies für ein positives m nach einer Drehung um einen Winkel des zweiten bezw. dritten, für ein negatives m nach einer Drehung um einen Winkel des ersten bezw. vierten Quadranten. Naturgemäss liegt der Winkel ω° für $m = 0$ zwischen dem ersten und zweiten, bezw. dem dritten und vierten Quadranten, beträgt also 90° bezw. 270°, was auch obige Gleichung bestätigt.

Wenn ich nun auf einer Geraden die Winkel ω von 0° bis 360° als Abszissen abtrage und die zugehörigen Differenzen $\omega_1 - \omega_0$ zu Ordinaten mache, so ergiebt sich in deren Endpunkten die Kurve der Umdrehungsfehler. Von dieser weiss ich nun durch obige Betrachtung, dass sie die Abscissenaxe je nach der Wahl von m und α zwei- oder viermal schneidet. Soll die Kurve stetig sein, so muss sie im ersten Fall ein Maximum und ein Minimum, im letzteren zwei Maxima und zwei Minima besitzen, d. h. die Gleichung für die Winkel ω, welche die Maxima und Minima erzeugen, muss im allgemeinen vier Werthe ω ergeben, die unter derselben Bedingung reell sind, unter der auch die vier Nullpunkte erscheinen; zwei von diesen Werthen müssen aber verschwinden, sobald die Bedingung für die Reellität aller vier Nullpunkte nicht erfüllt ist. Diese lautet in präziser Form:

$$-1 \leqq m \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \leqq +1.$$

Ich suche nun die Winkel ω für die Maxima und Minima der Drehungsfehler auf, indem ich die erste Ableitung der Gleichung 1b) gleich Null setze.

$$\frac{d}{d\omega} \left\{ \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\cos \alpha}\right) \sin 2\omega - m \operatorname{tg} \alpha \sin \omega \right\} = 0;$$

$$\left(1 - \frac{1}{\cos \alpha}\right) \cos 2\omega - m \operatorname{tg} \alpha \cos \omega = 0;$$

$$\left(1 - \frac{1}{\cos \alpha}\right) \left(2 \cos^2 \omega - 1\right) - m \operatorname{tg} \alpha \cos \omega = 0.$$

$$\frac{2\cos^2 \omega - 1}{\cos \omega} = \frac{m \operatorname{tg} \alpha}{1 - \frac{1}{\cos \alpha}} = \frac{-m \sin \alpha}{1 - \cos \alpha} = -\frac{2m \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}}{2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}} = -m \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}$$

Führe ich statt dieses Winkels ω die Bezeichnung ω' ein, so erhalten wir die quadratische Gleichung:

$$\cos^2 \omega' + \frac{m}{2} ctg \frac{\alpha}{2} . \cos \omega' = 1/2,$$

und ihre Wurzeln:

3) $$\cos \omega' = -\frac{m}{4} ctg \frac{\alpha}{2} \pm \sqrt{\frac{m^2}{16} ctg^2 \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2}}.$$

Da der eindeutig bestimmte Werth eines $\cos \omega$ für zwei $\angle \omega$ der ersten vier Quadranten gilt, so erhalte ich hier die vier erwarteten Winkel. Deren Werthe sind reell unter obiger Bedingung $m\, ctg\, \alpha/2 \leqq 1$ (absolut). Zum Beweise setze ich die Grenzwerthe $m\, ctg\, \alpha/2 = 0$ und $m\, ctg\, \alpha/2 = \pm 1$ in Gleichung 3) ein. Es ergiebt sich für $m\, ctg\, \alpha/2 = 0$; d. i. $m = 0$:

3a) $$\cos \omega' = \pm \sqrt{\frac{1}{2}};$$

für $m\, ctg\, \alpha/2 = +1$:

3b) $$\cos \omega' = -\frac{1}{4} \pm \sqrt{\frac{9}{16}} = +\frac{1}{2} \text{ bezw. } -1;$$

für $m\, ctg\, \alpha/2 = -1$:

3c) $$\cos \omega' = +\frac{1}{4} \pm \sqrt{\frac{9}{16}} = +1 \text{ bezw. } -\frac{1}{2}.$$

Wird $m\, ctg\, \alpha/2 > 1$ (absolut), so geht, wie vorausgesehen, je einer der Werthe $\cos \omega'$ in 3b) und 3c) in einen Werth > 1 über, wird also irrational, während der andere stets reell bleibt. Wächst nämlich $m\, ctg\, \alpha/2$ bis zu seinem absoluten Endwerth, d. h. wird $m = \pm \infty$, so wird $\cos \omega' = 0$.

Aus den Zahlen der Endwerthe ersehen wir Folgendes:

Sind beide Werthe $\cos \omega'$ reell, so betragen für $m = 0$ die Winkel ω': 45, 135, 225, 315°; für ein positives m ($m\, ctg\, \alpha/2$ zwischen 0 und 1) liegen sie zwischen 45 und 60, 135 und 180, 180 und 225, 300 und 315°, für ein negatives m ($m\, ctg\, \alpha/2$ zwischen 0 und -1), zwischen 0 und 45, 120 und 135, 225 und 240, 315 und 360°.

Ist nur ein Werth $\cos \omega'$ reell, so liegen die Winkel ω' für ein positives m ($m\, ctg\, \alpha/2 > 1$) zwischen 60 und 90, 270 und 300°, für ein negatives m ($m\, ctg\, \alpha/2 < -1$) zwischen 90 und 120, 240 und 270°.

Um den Charakter der Kurve vollständig zu kennen, brauchen wir nur noch zu wissen, für welche von diesen Werthen ein Maximum, für welche ein Minimum entsteht. Nun lautet der zweite Differentialquotient von $f(\omega)$ in Gleichung 1b):

$$f''(\omega) = 4 \left(\frac{1}{\cos \alpha} - 1 \right) \sin \omega \cos \omega + m\, tg\, \alpha \sin \omega$$

$$= \frac{8 \sin^2 \alpha/2}{\cos \alpha} \sin \omega \cos \omega + \frac{2m}{\cos \alpha} \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} \sin \omega .$$

4) $$f''(\omega) = \frac{2 \sin \alpha/2}{\cos \alpha} \sin \omega \left\{ 4 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \omega + m \cos \frac{\alpha}{2} \right\}$$

Will ich untersuchen, welche von den Werthen, für die $f'(\omega) = 0$ wird, $f''(\omega)$ positiv, welche negativ machen, so muss ich zusehen, in welchem Quadranten die Winkel ω' zu dem Zwecke liegen müssen. Das Resultat wird nun von m abhängen.

Ich betrachte die beiden Gruppen der Kurven wieder für sich.

$$\text{I.} \quad -1 \leqq m\, ctg\, \frac{\alpha}{2} \leqq +1.$$

Da $m\, ctg\, \alpha/2 \leqq 1$ ist, so ist $m \cos \alpha/2 \leqq \sin \alpha/2$ und daher jedenfalls $< 4 \sin \alpha/2 \cos \omega$, weil ja $4 \cos \omega$ mindestens $4 . {}^1/_2 = 2$ beträgt.

Daher ist das Glied $m \cos \alpha/2$ in Gleichung 4) nicht im Stande, das Vorzeichen der ganzen $f''(\omega)$, so wie es sich aus:

$$f''(\omega) = \frac{8 \sin^2 \alpha/2}{\cos \alpha} \sin \omega \cos \omega$$

ergiebt, zu beeinflussen.

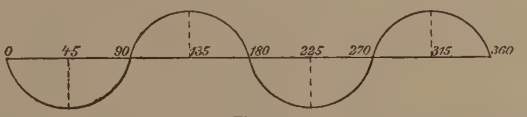

Fig. 2.

Die rechte Seite dieser Gleichung wird aber positiv, wenn ω im ersten und dritten, negativ, wenn ω im zweiten und vierten Quadranten liegt: und so entstehen, gleichgiltig ob $m \gtrless 0$ ist, Minima im ersten und dritten, Maxima im zweiten und vierten Quadranten.

Nun sind die Kurven der $\omega_1 - \omega$ für Fall I. ihrem Charakter nach bestimmt; in Fig. 2 ist diejenige für $m = 0$, sowie in den Fig. 3 und 4 je eine charakteristische Kurve für $m > 0$ und $m < 0$ aufgezeichnet.

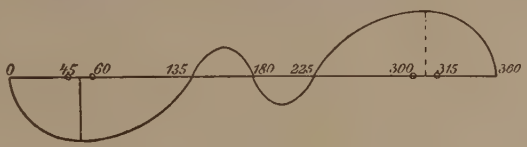

Fig. 3.

$$\text{II.} \quad -1 > m\, ctg\, \alpha/2 > +1.$$

Auch hier hat das Glied $m \cos \alpha/2$ keinen Einfluss auf das Vorzeichen von $f''(\omega)$.

Zwar kann $m\, ctg\, \alpha/2 > 4 \cos \omega$ werden, da die Werthe von $4 \cos \omega$ nur bis 2 ansteigen können; doch wird, wie wir gesehen, im Fall II. bei positivem m der $\cos \omega$ selbst positiv (zwischen 0 und ${}^1/_2$), bei negativem m selbst negativ (zwischen 0 und $-{}^1/_2$).

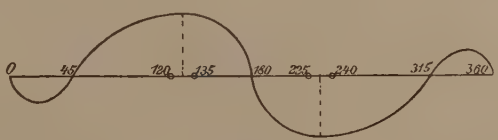

Fig. 4.

Die beiden Summanden der Gleichung 4) werden also, gleichgiltig welchen Werth $m\, ctg\, \alpha/2$ annehmen mag, stets dasselbe Vorzeichen haben. Daher erhalte ich

für $m > 0$ ein Minimum im ersten, ein Maximum im vierten Quadranten und

für $m < 0$ ein Maximum im zweiten, ein Minimum im dritten Quadranten.

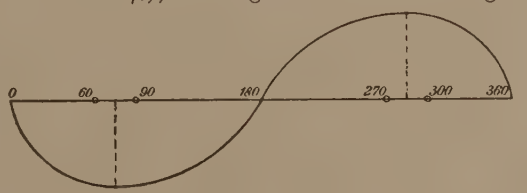

Fig. 5.

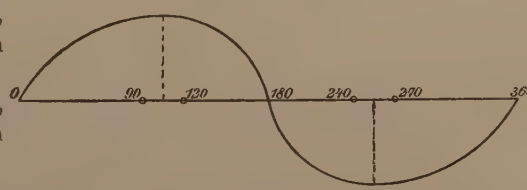

Fig. 6.

Man kann leicht erkennen, wie die nun folgenden Kurven, Fig. 5 ($m > 0$) und 6 ($m < 0$), aus denen des Falles I (Fig. 3 und 4) abarten.

Ich gehe nun daran, aus den bisherigen Erörterungen eine praktische Folgerung zu ziehen:

Bei dem Wanschaff'schen Apparat bedeutet OY eine Normalschraube, durch deren Drehung eine an der Drehung verhinderte Mutter in axiale Bewegung versetzt wird. Diese ist durch einen Rahmen mit einer Schneidekluppe verbunden, welche auf der sich drehenden Werkspindel OS befestigt ist, an der Längsbewegung der obengenannten Mutter theilnimmt und die Normalschraube kopiren soll.

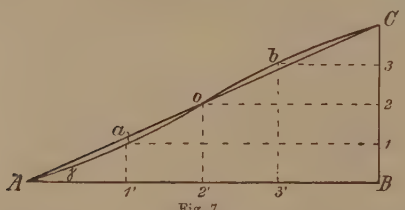

Fig. 7.

Eine fehlerlose auf diesem Apparat erzeugte Schraube möge nun Schraubengänge aufweisen, welche, abgewickelt, die Gerade AC (Fig. 7) ergeben, den Steigungswinkel γ besitzen, BC zur Steigung und AB zur Basis haben.

Nun nehme ich an, der Schraubengang werde fehlerhaft dadurch, dass Normalschraube und Werkspindel den Winkel α bilden. Wenn sich die erstere gleichmässig dreht, wenn also $\angle\,\omega$ gleichmässig wächst, so wird die Mutter in gleichen Zeiten gleiche Theile der Steigung s zurücklegen, z. B. $\widehat{B1} = \widehat{12} = \widehat{23} = \widehat{3C} = s/4$.

Da die Mutter mit der Kluppe zwangläufig verbunden ist, so schreitet sie in den gleichen Zeiten um dasselbe Stück $s/4$ fort, währenddem ein Peripheriepunkt der Werkspindel in Folge des ungleichmässigen Wachsens von ω_1 die ungleichen Strecken $A1'$, $1'2'$, $2'3'$, $3'B$ zurücklegt.

Während sich nun die Werkspindel um $A1'$ gedreht hat, ist die Kluppe um $B1$ axial fortgeschritten. Daher liegt der zu dieser Zeit erreichte Punkt des Schraubengangs um das Stück $B1 = 1'a$ vertikal über $1'$. Ebenso finde ich die anderen Punkte des Ganges und somit die ganze Kurve. Wird $\omega = \omega_1$, hat sich also die Kluppe um das zur Erzeugung einer fehlerlosen Schraube nöthige Stück gedreht, dann schneidet die Kurve die Gerade AC. Hat $\omega_1 - \omega$ ein Maximum oder Minimum erreicht — was über $1'$ und $3'$ stattfinden mag — dann weicht die Kurve von der Geraden AC am meisten ab; nur hat sie ein Minimum da, wo die Kurve der $\omega_1 - \omega$ ein Maximum aufweist und umgekehrt. In dieser eben erläuterten Weise wird also die Kurve der $\omega_1 - \omega$ bei Erzeugung des Schraubengangs kopirt.

Versetzt man eine Schraube, deren abgewickelte Gänge von der Geraden abweichen, in Drehung, so erkennt man ein entsprechendes Schleudern der Gänge. Man bezeichnet in der Praxis dieses Schleudern als „den Schwindel“ der Schraube. Bei der Untersuchung und bei der Regulirung von Schrauben stellt sich heraus, dass der Schwindel — wenn ich mich dieses Ausdruckes bedienen darf — einfach oder mehrfach auftritt; einfach wird er genannt, wenn die Kurve des abgewickelten Schraubengangs nur eine grösste Abweichung von der Geraden besitzt, doppelt, wenn sie deren zwei (ein Maximum und ein Minimum) aufweist u. s. f. Da sie nun eine Kopie der Kurve der $\omega_1 - \omega$ ist, so gelten in Bezug auf die Nullpunkte und die grössten Abweichungen für beide die gleichen Bedingungen: und so habe ich im Vorangehenden die mathematischen Voraussetzungen fixirt, für welche in Wanschaff'schen Schrauben doppelter und für welche vierfacher Schwindel auftritt.

In ähnlicher Weise wie hier werden sich bei allen denjenigen Schrauben-

schneidapparaten, deren Patrone und Werkspindel auf andere Art gekuppelt sind, entsprechende Bedingungen festlegen lassen.

Sind die beiden Axen durch Herzstück und Mitnehmer verbunden, so soll man sein Augenmerk darauf richten, $m = 0$ werden zu lassen, so dass Punkt A mit Punkt O (Fig. 1) zusammenfällt. Denn aus der Gleichung 1b) ersehe ich Folgendes:

Die Fehler, die bei der Drehung von 0 bis 360° für $m = 0$ entstehen, werden, sobald ich m bei gegebenem α mit einem Werthe $\gtrless 0$ vertausche, zum Theil vergrössert und zum Theil verkleinert — jenachdem m positiv oder negativ ist und gleichzeitig $\sin \omega$ mit $\sin 2\omega$ gleiches oder entgegengesetztes Vorzeichen hat. Auch wenn man die Kurven der $\omega_1 - \omega$ für die Fälle $m \gtrless 0$ mit der für den Fall $m = 0$ vergleicht, so ersieht man, dass in ersteren Kurven die Maxima bezw. Minima theils grösser, theils kleiner sind als die entsprechenden in der Kurve für $m = 0$. Das relativ kleinste aller Maxima bezw. Minima der Kurven $\omega_1 - \omega$ entsteht also durch die Wahl $m = 0$.

Punkt F möge nun bestimmt sein; so liegt, bei einer bestimmten Axenneigung α, senkrecht unter F ein Punkt O' der Werkspindel, welcher gleichzeitig ein Punkt der Normalschraube sein muss, wenn $m = 0$ ist. Die Werkspindel des Wanschaff'schen Apparats ist mit einem Kegel in einem Hohlkegel der Schraube gelagert. Fig. 8 zeigt die Anordnung für einen gewissen $\angle \alpha$, O' bedeutet den Punkt unter F.

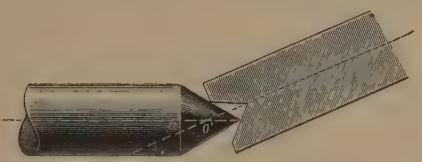

Fig. 8.

Verändere ich den Winkel α, dann verändert sich gleichzeitig die Lage des Axenschnittpunktes. Die gestellte Forderung, dass F senkrecht über O liege, kann also bei obiger Spitzenanordnung nur immer für einen einzigen Winkel α erfüllt werden; sie könnte nur dann unabhängig von der Winkelneigung werden, wenn die Werkspindel statt mit der Spitze mit einer Kugel in der Normalschraube gelagert wäre, deren Radius die von O' auf die Hohlkegelseite gefällte Senkrechte, also abhängig von dem Winkel des Hohlkegels wäre. Kehrt man nun noch die Anordnung um, indem man die Werkspindel mit einem Hohlkegel, die Normalschraube mit einer Kugel versieht, dann kann auch dieser Winkel ein beliebiger sein. Somit gilt für die praktische Ausführung folgendes:

Man setzt in die Normalschraube eine Kugel ein, verlegt F ein für allemal senkrecht über deren Mittelpunkt und kann dann den Werkspindeln einen beliebigen Hohlkegel geben. Dann wird m für alle Winkelneigungen den Werth 0 behalten. Ein vorzügliches Prüfungsmittel, ob m auch wirklich 0 geworden ist, besitzen wir in der Erkenntniss, dass in diesem Fall die Ungleichförmigkeit nach je einer Vierteldrehung verschwindet.

Ich komme nun dazu, den kleinsten Winkel α zu berechnen, welcher unter Annahme der gebräuchlichen Messungsmethode der Ungleichförmlichkeiten einen schon merklichen Fehler $\omega_1 - \omega$ erzeugt. Wie die Messung vor sich geht, erklärt Wanschaff selbst folgendermaassen:

„Es wurde auf dem Apparat eine Schraube geschnitten, darauf herausgenommen, zwischen feste Spitzen gespannt und dadurch untersucht, dass das Fortschreiten eines langen Zeigers, der an einer von ihr bewegten Mutter befestigt wurde, an einer Skale abgelesen wurde."

Mit der Schraube wird eine Trommel verbunden, welche gestattet, sehr

kleine Theile der Drehung abzulesen und mit den vom Zeiger zurückgelegten Strecken zu vergleichen.

Leman suchte jenen kleinsten Winkel α für den Fall zu bestimmen, dass $m = 0$ ist. Er erhielt dafür aus seiner Gleichung: $\omega_1 - \omega = + \sin^2 \alpha/2 \sin 2\omega$ und schrieb:

„Die mit der Schraube verbundene Trommel wird der Regel nach in 60 oder 100 Theile getheilt sein; bei den Beobachtungen werden Zehntel eines solchen Pars geschätzt; es können also etwa Hundertel durch eine nicht allzu grosse Reihe von Messungen noch ermittelt werden. Da nun das erste Glied in $\omega_1 - \omega$ sein absolutes Maximum erreicht, wenn $\sin 2\omega = 1$ wird, aber sowohl positiv als negativ werden kann, so kann unter Umständen das Glied schon bemerklich werden, wenn

$$\sin^2 \frac{1}{2} \alpha = \frac{1}{2.\ 100.\ 100}$$

vom Umfange der Trommel ist."

Die Ausführungen sind richtig, da wir den kleinsten $\angle \alpha$ kennen wollen und zu dem Zwecke den anderen Faktor $\sin 2\omega$ zum Maximum machen müssen.

Aus unserer Gleichung erhalten wir für $\omega_1 - \omega$ denselben Ausdruck, nur mit umgekehrtem Vorzeichen; dieses bedeutet nur, dass der Fehler für $\sin 2\omega = 1$ negativ wird, hat also auf das Leman'sche Resultat keinen Einfluss. Letzteres ergiebt sich, wie folgt:

$$\sin^2 \frac{1}{2} \alpha = \frac{360.\ 60.\ 60}{2.\ 100.\ 100} \sin 1'' = 64{,}8 \sin 1'',$$

wenn wir den Sinus statt des Bogens einer Sekunde einsetzen.

Und so wird: $\alpha = 2^\circ\ 1'{,}8.$

Auch die letzte Folgerung der Leman'schen Arbeit darf der Vollständigkeit wegen nicht unerwähnt bleiben — obwohl ich nur zwischen den Zeilen ihren Gedankengang entnehmen konnte. Derselbe dürfte folgender sein:

Wird der kleinste $\angle \alpha$, welcher einen merklichen Fehler hervorbringt, noch kleiner als der eben gefundene Werth, so wird die richtige Einstellung des Apparats noch schwieriger.

Wir setzen nun voraus, dass m einen beliebigen Werth $\gtrless 0$, aber nicht den Werth 0 annehmen darf, und setzen für α den eben gefundenen Werth in Gleichung 1b ein. (So ist nun α, da m nicht mehr 0 ist, ein beliebig gewählter Winkel). Ist dann $\omega_1 - \omega$ der kleinste messbare Drehungsfehler

$$d = \frac{2\pi}{2.\ 100.\ 100} = 0{,}00031,$$

so ersehen wir aus

$$d = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\cos \alpha}\right) \sin 2\omega - m\, tg\, \alpha \sin \omega,$$

dass zu obigem Winkel α und einem bestimmten Winkel ω ein bestimmtes m gehört.

Wir wählen $\omega = 90^\circ$; dann fällt der erste Summand fort und der zweite wird zu $m\, tg\, \alpha$; also ist:

$$m = \frac{d}{tg\, \alpha}\ (\text{absolut}) = 0{,}0089.$$

Wird m grösser als dieser Werth, dann wird $tg\, \alpha$ kleiner, dann ist also zur Erzeugung von d nur ein Winkel α erforderlich, der noch kleiner ist als $2^\circ\ 1'{,}8$.

So ist also eine Zahl gefunden, über die m nicht wachsen darf, um den Apparat nicht ungünstiger zu machen.

Die Willkür dieser Rechnung ist klar. Erstens ist α beliebig gewählt.

Ferner ist $m = 0{,}0089$ nicht der kleinste Werth, der d bei gegebenem α hervorbringt. Diesen erhalten wir erst dann, wenn wir m bei konstantem d und α durch die entsprechende Wahl von ω zum Minimum machen — wobei ω nicht $= 90°$ wird, sondern von beiden gegebenen Grössen abhängt. Der Werth von m wäre somit leicht zu finden; doch begnüge ich mich wegen der willkürlichen Wahl von α mit der Andeutung der Entwicklung.

Ich stelle mir dagegen die Aufgabe, möglichst allgemein darzuthun, wie ein in der Praxis vorkommendes m jenen für $m = 0$ gefundenen Winkel α noch reduziren kann.

Dann setze man für $\omega_1 - \omega$ die kleinste Zahl d, welche noch durch unsere Messungen bemerkbar wird und stelle die Bedingung, dass sie ein absolutes Maximum werde — dass also der Fehler gerade noch in einem Moment, dem der Drehung um einen $\angle\, \omega'$, zu konstatiren sei, in allen anderen unmerklich klein werde.

Deshalb führe man an Stelle von ω den Werth des Winkels ω' ein, für den $\omega_1 - \omega$ zum Maximum wird. Dann entsteht für d eine Gleichung, in welcher nur m und α enthalten ist, und so ergiebt sich für ein gegebenes m ein bestimmter $\angle\, \alpha$.

Kleinere Winkel α werden dann bei demselben m in keinem Drehungsmoment mehr gestatten, einen Fehler zu konstatiren.

Bewiesen ist, dass die relativ kleinsten Maxima für $m = 0$ entstehen.

Vergrössern wir m, ohne $\angle\, \alpha$ zu verändern, dann vergrössert sich das absolute Maximum; vergrössern wir dagegen m und wollen trotzdem das Maximum unverändert beibehalten, dann muss die Fehlerursache α einen geringeren Werth annehmen. Nun wollen wir einen Winkel α finden, der durch seinen geringen Werth von dem für $m = 0$ bestimmten möglichst ungünstig abweicht; also müssen wir sehen, m für das gleichbleibende Maximum d möglichst gross zu machen. Wird m unendlich gross, also auch $m\, ctg\, \alpha/2 = \infty$, dann ist $\sin \omega' = 1$, also $\sin 2\omega' = 0$, und wenn wir nun den Winkel ω' in Gleichung 1b einführen, um d zum Maximum zu machen, so ergiebt sich die einfache Beziehung: $d = m\, tg\, \alpha$.

Diese Beziehung darf aber auch für endliche Werthe von $m\, ctg\, \alpha/2$ gelten, wenn sie nur so gross sind, dass gemäss Gleichung 1b: $\frac{1}{2}(1 - 1/\cos\alpha) \sin 2\omega'$ gegenüber $m\, tg\, \alpha \sin \omega'$ d. i. $\cos \omega'$ gegenüber $m\, ctg\, \alpha/2$ verschwindet. Diese Voraussetzung sei erfüllt, wenn wir z. B. $m\, ctg\, \alpha/2 = 100$ wählen, d. i. gemäss Gleichung 3 etwa das 5000-fache des $\cos \omega'$.

Da nun

$$tg\, \alpha = \frac{2\, tg\, \alpha/2}{1 - tg^2\, \alpha/2}$$

ist und wir den Nenner vernachlässigen dürfen, so wird dann:

$$m = 100 \,.\, tg\, \alpha/2 = 50\, tg\, \alpha, \text{ also } d = m\, tg\, \alpha = m^2/50,$$

$$m = \sqrt{0{,}0003 \,.\, 50} = \sqrt{0{,}015} = 0{,}1225.$$

Hieraus finden wir

$$tg\, \alpha = \frac{0{,}1225}{50} = 0{,}00245$$

$$\alpha = 0°\ 8'\ 25''{,}5.$$

Hier hat $e = mr$ ungefähr den Werth 1,8 *mm*, wenn r an dem Wanschaff'schen Apparat ungefähr 15 *mm* gross ist. Da $\angle\, \alpha$ dem m umgekehrt proportional ist, so erkennt man leicht, auf wie kleine Werthe $\angle\, \alpha$ durch noch weitergehende Vergrösserung von m reduzirt werden kann. Die geringsten Axenneigungen können also schon merkliche Drehungsfehler hervorrufen, wenn nicht die grösste

Sorgfalt auf die Anordnung des Mitnehmers verwendet wird; man muss also bestrebt sein, nicht nur e möglichst klein, sondern zur Sicherheit auch r möglichst gross zu wählen.

Ich gehe daran, die letzte praktische Folgerung aus den aufgestellten Gleichungen zu ziehen. Ich setze voraus, dass die Praxis in der Lage ist, die Umdrehungsfehler d_ω der Werkspindel für eine bestimmte Drehung ω der Normalschraube zu ermitteln. Dann sind wir im Stande, α genau zu berechnen und können demnach den Apparat korrigiren. Kennen wir nämlich m als proportional $tg\,\alpha/2$, also $m = k\,tg\,\alpha/2$, so wird für einen $\angle\,\omega$ der zugehörige Drehungsfehler

$$d_\omega = {}^1/_2\,(\cos\alpha - 1)\sin 2\,\omega - k\,tg\,\alpha/2\;tg\,\alpha\sin\omega.$$

Nun ist

$$tg\,\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha},\quad \text{also}\quad tg\,\frac{\alpha}{2}\,tg\,\alpha = 1-\cos\alpha,\quad \text{folglich}$$

$$d_\omega = (1-\cos\alpha)\;(-\,{}^1/_2\sin 2\,\omega - k\sin\omega),\quad \text{und}$$

5) $$\cos\alpha = 1 + \frac{d_\omega}{{}^1/_2\sin 2\,\omega + k\sin\omega}.$$

Kann ich also im allgemeinen d_ω für einen beliebigen $\angle\,\omega$ bestimmen, dann ist mir $\angle\,\alpha$ bekannt. Eine Zahl k kennen wir leider nur für den Fall doppelter Maxima und Minima. Dann ist nämlich nach Gleichung 2:

$$m = -\cos\omega^\circ\;tg\,\alpha/2,\quad \text{also}\quad k = -\cos\omega^\circ.$$

Man stelle daher ω° durch Beobachtung fest, dann bestimme man d_{90} für $\omega = 90^\circ$ und erhält:

5a) $$\cos\alpha = 1 - \frac{d_{90}}{\cos\omega^\circ};\quad \text{d. i. da}$$

d_{90} und $\cos\omega^\circ$ stets gleiches Vorzeichen haben, ein stets reeller Werth.

Ist aber ω° selbst $= 90^\circ$, also $m = 0$, dann bestimme man d_{45} und erhält:

5b) $$\cos\alpha = 1 + 2\,d_{45};\quad \text{d. i. da}$$

d_{45} für $m = 0$ stets negativ ist, ein stets reeller Werth (vergl. die Kurven). Für den Fall eines einfachen Maximum und Minimum fehlt uns der Koeffizient k. Ich gebe daher im Folgenden zur Berechnung von α eine zweite Methode an, welche ganz allgemein giltig ist. Für d_{90} wird Gleichung 1b) zu $d_{90} = -\,m\,tg\,\alpha$.

Daher ergiebt sich:

$$d_\omega = \frac{1}{2}\,.\,\sin 2\,\omega - \frac{1}{2}\,\frac{\sin 2\,\omega}{\cos\alpha} + d_{90}\sin\omega.$$

6) $$\cos\alpha = \frac{{}^1/_2\sin 2\,\omega}{{}^1/_2\sin\,.\,2\,\omega + d_{90}\sin\omega - d\omega}.$$

Wähle ich z. B. $\omega = 60^\circ$ und bestimme d_{90} und d_{60}, so wird allgemein:

$$\cos\alpha = \frac{\frac{1}{4}\sqrt{3}}{\frac{1}{4}\sqrt{3} + d_{90}\cdot\frac{1}{4}\sqrt{3} - d_{60}} = \frac{1}{1 + d_{90} - 2{,}3\,d_{60}}.$$

Da $d_{90} - 2{,}3\,d_{60}$ eine sehr kleine Zahl ist, so kann ich auch schreiben:

6a) $$\cos\alpha = 1 - (d_{90} - 2{,}3\,d_{60}).$$

Da beide Fehler gleichzeitig positiv oder negativ sind, und im ersteren Falle $d_{90} > d_{60}$, im letzteren $d_{60} > d_{90}$ ist (siehe die Kurven), so ist $\cos\alpha$ ein stets reeller Werth.

II.

Ich wende mich nun zur Untersuchung der Ungleichförmigkeit, welche in der Drehung zweier mittels eines Zahnräderpaares verbundenen Axen durch die Exzentrizität eines Rades hervorgerufen werden kann. Die Entwicklung soll im Allgemeinen nach der von Leman eingeschlagenen Methode erfolgen, doch ohne in den Einzelheiten an ihr festzuhalten.

Wir nehmen zunächst an, dass das exzentrische Rad treibend wirke. Bei exzentrischer Lagerung eines Rades berühren sich die Theilkreise im Allgemeinen nicht. Tritt aber nach gewisser Drehung der Räder der spezielle Fall der Berührung ein, wie er in der Figur dargestellt ist, so muss ΔOM_1M (Fig. 9) gleichschenklig sein; denn MM_1 ist die Entfernung der Lagermitten und somit gleich der Summe der Theilkreisradien r und r_1, also gleich der Zentrallinie OM_1. Da aber die Exzentrizität $MO = e$ im Vergleich zu OM_1 und MM_1 einen sehr kleinen Werth haben soll, so kann ich $\angle OMM_1$ als einen rechten betrachten.

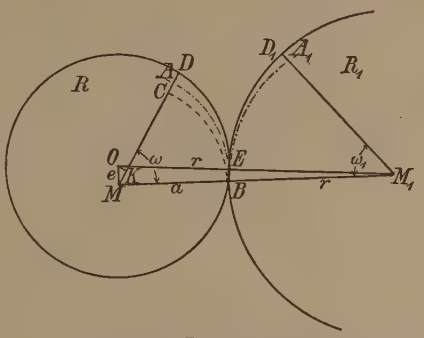

Fig. 9.

Bei der Drehung der Räder werden sich Rollkurven bilden, die von den Theilkreisen abweichen und deren Gestalt von dem Betrage der Exzentrizität, der Grösse der Theilkreisradien, der Theilung und dem Zahnprofil abhängt. Ohne Kenntniss aller dieser Grössen ist eine strenge Lösung ausgeschlossen. Da eine solche aber wegen der Schwierigkeiten der Aufgabe doch nur zu angenäherten Resultaten führen würde, so begnügt sich Leman mit einer möglichst allgemein gehaltenen Darstellung und nimmt an, „dass die entsprechende Unrichtigkeit des Zahneingriffs sich auf beide Räder vertheilt, dass also, wenn die Zähne in Folge der Exzentrizität tiefer als ordnungsmässig in einander eingreifen, der aktive Radius des antreibenden Rades etwas kleiner sein wird als die Entfernung des entsprechenden Punktes des Theilkreises vom Drehpunkt, und entsprechend beim getriebenen Rade etwas grösser [1]), dass also, wenn MD und M_1D_1 zugehörige Radien sind, etwa A und A_1 die zur Berührung kommenden Punkte der Zahnflanken seien."

Hierzu ist Folgendes zu bemerken: Die gleichmässige Vertheilung des Fehlers auf beide Räder ist eine annehmbare Voraussetzung; die Punkte A und A_1 dagegen berühren sich streng genommen nach der Drehung der Räder um ω bezw. ω_1 im Allgemeinen nicht. Während diese Punkte nämlich nach der genannten Drehung in die Linie MM_1 zu liegen kommen, müssen wir annehmen, dass sich die Rollkurven etwa in der jeweiligen Zentrallinie OM_1 berühren. Da jedoch die Entfernung von A und A_1, wie leicht zu beweisen ist, von der gleichen Ordnung ist wie e^2 und daher vernachlässigt werden darf, und da ferner der zwischen OM_1 und MM_1 liegende Theil der Rollkurven nahezu senkrecht auf OM_1 steht, so hat die Verlegung des Berührungspunktes von OM_1 nach MM_1 auf die

[1]) Anm. Diese Auffassung ist nicht richtig, da die aktiven Radien beider Räder in obigem Fall kleiner oder grösser sind als die Entfernung des entsprechenden Punktes des Theilkreises vom Drehpunkt, wie sich aus der Figur ersehen lässt; denn $MA < MD$ und $M_1A_1 < M_1D_1$.

Geschwindigkeit des getriebenen Rades keinen nennenswerthen Einfluss. Ich mache daher die nachstehenden Ableitungen in der Weise, als ob sich die Räder in der Linie MM_1 und zwar bei der Anfangsstellung in dem einen Punkt B und nach der Drehung um ω bezw. ω_1 in den zusammenfallenden Punkten A und A_1 berührten.

Bei der Drehung des treibenden Rades um ω komme C nach B, so dass A zwischen C und D zu liegen kommt. Dann ist $CA = n \cdot CD$, wenn n einen echten Bruch bedeutet.

Leman giebt an, dass sich der Werth desselben niemals viel von $^1/_2$ entferne, betrachtet n für die Rechnung als konstant und folgert:

$$MD = r + e \cos \omega.$$

Diese Grundgleichung ist nicht richtig. Fällen wir nämlich von O auf MD die Senkrechte OK, dann kann diese als ein mit OD um D geschlagener Kreisbogen betrachtet werden; dann ist $DK = r$ und $MK = e \sin \omega$. Wir verändern daher obigen Werth in:

$$MD = r + e \sin \omega.$$

Bezeichnen wir noch MB mit a, dann ergiebt sich $CD = r - a + e \sin \omega$. Nun ist:

$$a = \sqrt{r^2 - e^2} = r\left[1 - \frac{1}{2}\left(\frac{e}{r}\right)^2\right].$$

Da ich auch das Quadrat der kleinen Grösse e vernachlässigen kann, so können wir schreiben $CD = e \sin \omega$ und $M.A = \rho = r + n \,.\, e \sin \omega$.

Da nun die Summe $MA + M_1 A_1 = r + r_1$ werden muss, so erhalten wir $M_1 A_1 = \rho_1 = r_1 - n \,.\, e \sin \omega$.

Es besteht ferner die Beziehung:

$$d\omega_1 = \frac{\rho}{\rho_1}\, d\omega.$$

Setze ich die Werthe für ρ und ρ_1 in letztere Gleichung ein, so ergiebt sich:

$$d\omega_1 = \frac{r + ne \sin \omega}{r_1 - ne \sin \omega}\, d\omega = \frac{r}{r_1} \frac{1 + \frac{ne}{r} \sin \omega}{1 - \frac{ne}{r_1} \sin \omega}\, d\omega.$$

Nun ist aber:

$$\frac{1 + \frac{ne}{r} \sin \omega}{1 - \frac{ne}{r_1} \sin \omega} = 1 + \frac{ne(r + r_1) \sin \omega}{r r_1} + \frac{(ne)^2 (r + r_1)}{r r_1^2} \sin^2 \omega + \ldots$$

Da e eine sehr kleine Zahl ist, so dürfen wir uns mit den ersten beiden Gliedern der Reihe begnügen und erhalten:

$$d\omega_1 = \frac{r}{r_1}\left(1 + \frac{ne(r + r_1)}{r r_1} \sin \omega\right) d\omega,$$

$$\omega_1 = \frac{r}{r_1}\, \omega - \frac{ne(r + r_1)}{r_1^2} \cos \omega + C.$$

Da für $\omega = 0$ auch $\omega_1 = 0$ wird, so ist $C = \frac{ne(r + r_1)}{r_1^2}$, also:

$$\omega_1 = \frac{r}{r_1}\, \omega + \frac{ne(r + r_1)}{r_1^2}(1 - \cos \omega) = \frac{r}{r_1}\, \omega + 2\, \frac{ne(r + r_1)}{r_1^2} \sin^2 \frac{\omega}{2}.$$

Machen wir nun einmal die Voraussetzung, dass das exzentrische Rad getrieben werde und geben allen Grössen des getriebenen Rades wiederum den

Index 1, so bleibt die Entwicklung genau dieselbe, nur müssen wir die Indizes mit einander vertauschen.

Wir erhalten also:

$$\omega = \frac{r_1}{r}\,\omega_1 + 2\,\frac{ne(r+r_1)}{r^2}\sin^2\frac{\omega_1}{2}.$$

Zum $\angle\,\omega$, den das treibende Rad beschreibt, gehöre nun für den Fall gleichförmiger Uebertragung ein $\angle\,\omega_0$ des getriebenen Rades, so verhält sich:

$$\frac{\omega_0}{\omega} = \frac{r}{r_1};\quad \omega_0 = \frac{r}{r_1}\,\omega.$$

In Folge der Exzentrizität eines der beiden Räder dreht sich aber das getriebene Rad nicht um ω_0, sondern um ω_1. Der Fehler beträgt also:

$$\omega_1 - \omega_0 = \omega_1 - \frac{r}{r_1}\,\omega.$$

Wenn ich die Gleichung für ω mit r/r_1 multiplizire, so ergiebt sich:

$$\frac{r}{r_1}\,\omega = \omega_1 + 2\,\frac{ne(r+r_1)}{rr_1}\sin^2\frac{\omega_1}{2}.$$

Daher können wir die oben entwickelten Gleichungen für ω_1 und ω schreiben in der Form:

7) $$\omega_1 - \omega_0 = 2\,\frac{ne(r+r_1)}{r_1^2}\sin^2\frac{\omega}{2}\quad\text{und}$$

8) $$\omega_1 - \omega_0 = -\,2\,\frac{ne(r+r_1)}{rr_1}\sin^2\frac{\omega_1}{2}.$$

In der ersteren erhalten wir also einen Ausdruck für den Umdrehungsfehler, der durch die Exzentrizität des treibenden Rades im getriebenen hervorgerufen wird, in der letzteren dagegen einen Ausdruck für den Umdrehungsfehler eines exzentrischen getriebenen Rades.

Da die rechte Seite beider Endgleichungen nur aus je einem Gliede besteht und nur dann 0 werden kann, wenn der halbe Winkel 0 oder 180°, der ganze also 0 oder 360° beträgt, so können in beiden Fällen nur Schrauben geschnitten werden, die im Verlauf eines ganzen Schraubenganges einfachen Schwindel aufweisen. Sein Maximum wird entstehen, wenn ω bezw. $\omega_1 = 180°$ ist, d. h. wenn das jeweilige exzentrische Rad eine halbe Drehung gemacht hat. Im Allgemeinen sind die Fehler für beide Fälle dieselben, wenn $r = r_1$ und zugleich $\angle\,\omega$ der Gleichung 7 $= \angle\,\omega_1$ der Gleichung 8 ist, also wenn sich bei einfacher Uebersetzung das exzentrische Rad je um den gleichen Winkel gedreht hat; das Vorzeichen der Fehler ist ein entgegengesetztes.

Ich bezeichne wieder mit d den kleinsten merklichen Drehungsfehler und beabsichtige, diejenige kleinste Exzentrizität zu bestimmen, welche bei gegebenem Umsetzungsverhältniss r/r_1 den Fehler d hervorruft: so muss ich für den Faktor $\sin^2\omega/2$ bezw. $\sin^2\omega_1/2$ das absolute Maximum einsetzen. Führe ich dann noch $n = 1/2$ ein, so wird die absolute Exzentrizität, wenn das treibende Rad exzentrisch ist

9) $$e = \frac{d\,.\,r_1^2}{r+r_1},$$

und wenn das getriebene exzentrisch ist

10) $$e' = \frac{d\,.\,rr_1}{r+r_1}.$$

Bezeichnen wir nun r/r_1 mit m, dann ist für die Uebersetzung m:

$$e_m = \frac{d \cdot r_1}{m+1} \text{ und } e'_m = \frac{md \cdot r_1}{m+1}.$$

Für $m = 1$ ergiebt sich also $e_1 = e'_1 = \frac{d \cdot r_1}{2}$.

Folglich verhält sich:

$$\frac{e_m}{e_1} = \frac{2}{m+1} \text{ und } \frac{e'_m}{e'_1} = \frac{2m}{m+1}, \text{ so dass } \frac{e_m}{e'_m} = \frac{1}{m} \text{ ist.}$$

Die letzten Ableitungen in Worten ausgedrückt lauten: der Maximalfehler ist der Exzentrizität, die ihn erzeugt, proportional. Für eine einfache Uebersetzung ($m = 1$) ist das Verhältniss der Exzentrizität zum Maximalfehler gleich dem halben Radius. Möge nun eine Exzentrizität e_1 bei einer bestimmten Drehung der gleich grossen Räder einen Fehler d hervorrufen, so will ich die einfache Uebersetzung in $m$fache verwandeln, und vertausche zu dem Zwecke das treibende Rad mit einem anderen. Ist dann das treibende Rad exzentrisch, so entsteht d, wenn ich e_1 mit $2/(m+1)$ multiplizire; ist das getriebene exzentrisch, so entsteht d, wenn ich e_1 mit $2m/(m+1)$ multiplizire. Soll in zwei verschiedenen Fällen der gleiche Maximalfehler durch das getriebene wie durch das treibende Rad erzeugt werden, so ist das Verhältniss der dazu nöthigen Exzentrizitäten das Umsetzungsverhältniss der Räder.

Bamberg wandte bei seinem Apparat die Uebersetzungen 1, $^3/_4$ und $^1/_2$ an. Er veränderte die einfache Uebersetzung zweier Räder mit dem Radius 23 *mm* dadurch, dass er das treibende Rad mit anderen vertauschte, deren Radien $^3/_4 \cdot 23 = 17{,}25$ bezw. $^1/_2 \cdot 23 = 11{,}5$ *mm* betrugen.

Es wird also:

$$e_1 = \frac{dr}{2} = \frac{0{,}00031 \cdot 23}{2} = 0{,}00357 \text{ mm}$$

$$e_{^3/_4} = \frac{2}{^7/_4} e_1 = \frac{8}{7} \cdot 0{,}00357 = 0{,}00408 \text{ mm}$$

$$e_{^1/_2} = \frac{2}{^3/_2} e_1 = \frac{4}{3} \cdot 0{,}00357 = 0{,}00476 \text{ mm}$$

$$e'_1 = e_1 = 0{,}00357 \text{ mm}$$

$$e'_{^3/_4} = \frac{3}{4} \cdot 0{,}00408 = 0{,}00306 \text{ mm}$$

$$e'_{^1/_2} = ^1/_2 \cdot 0{,}00476 = 0{,}00238 \text{ mm}.$$

Leman findet dagegen in seinem Aufsatz $e_1 = 0{,}029$, $e_{^1/_2} = 0{,}011$, $e'_{^1/_2} = 0{,}022$ und zieht aus seinen Endgleichungen für $\omega_1 - \omega_0$ eine Reihe von Schlüssen, die von den einfachen Folgerungen unserer Gleichungen bedeutend abweichen. Der Grund liegt darin, dass Leman nicht nur in der Grundgleichung den Sinus mit dem Cosinus vertauscht, sondern auch statt des Koeffizienten $ne(r + r_1)/rr_1$, der sich bei der Division von $r + ne \sin \omega / r_1 - ne \sin \omega$ ergiebt, $ne/r + r_1$ bezw. nach den dortigen Bezeichnungen $q/p_1 + p$ einführt, dass er ferner bei der Integration der Gleichung für $d\omega_1$ im ersten Gliede r/r_1 mit dem reziproken Werth vertauscht, den zweiten Summanden aber mit r/r_1 zu multipliziren verabsäumt und vielleicht aus diesem Grunde $\omega_0 = (r_1/r)\,\omega$ statt $= (r/r_1)\,\omega$ berechnet. Ferner sei noch erwähnt, dass Leman bei der Umformung der Gleichung für $d\omega$ ausser der Division noch eine Zerlegung der $f(\omega)$ nach dem Fourier'schen Theorem vornimmt, um sich hierauf mit den wieder erschienenen beiden ersten Summanden der vorher durch Division erhaltenen Reihe zu begnügen. Wenn Leman schliesslich e für

eine Bamberg'sche Uebersetzung $^2/_3$ berechnet, so hat er diese Zahl mit der Bamberg'schen $^3/_4$ verwechselt.

Exzentrizitäten von den oben gefundenen Werthen können schon durch ein an der Axe befindliches Stäubchen, durch den Druck, der beim Fräsen ausgeübt wird, durch Verbiegung der Axe u. a. m. hervorgerufen werden; darum ist es klar, dass das Festklemmen der Räder an der Axe durch eine Stellschraube, wie sie der vorliegende Apparat aufweist, unbedingt bedeutende Fehler verursachen wird.

Das grösste Interesse dürfte der allgemeinere Fall beanspruchen, in welchem beide Räder mit Exzentrizitäten versehen sind. Hierbei kann die Entwicklung der Gleichung der Umdrehungsfehler nicht von der Berührungsstellung der Theilkreise aus erfolgen, in welcher der von e und MM_1 eingeschlossene Winkel nicht, wie im vorher besprochenen Fall ein konstanter, sondern ein ganz beliebiger ist; letzterer müsste daher besonders berechnet werden, was jedoch mit grossen Schwierigkeiten verknüpft ist.

Bildet nämlich MM_1 in der Ausgangsstellung der Räder mit e und e_1 die Winkel α bezw. α_1 (Fig 10), so ist nach der Drehung bis zur Berührungsstellung $\angle M_1MO$, ebenso wie $\angle MM_1O_1$ eine Funktion von r, r_1, e, e_1, α und α_1, auf deren Beschaffenheit ich im Folgenden noch zurückkomme.

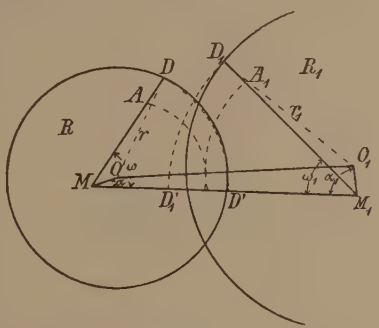

Fig. 10.

Für eine beliebige Ausgangsstellung seien mir nun zwei beliebige Winkel α und α_1 gegeben. Drehen sich die Räder um ω bezw. ω_1, so fallen MD und M_1D_1 in MM_1 zusammen. Hierbei komme D nach D' und D_1 nach D_1', während A und A_1 wiederum angenähert in einen Punkt zusammenfallen. Dann ist AD das n-fache der Entfernung der homologen Theilkreispunkte. Setze ich zur Vereinfachung der Rechnung schon hier $n = 1/2$, so ergiebt sich:

$$AD = A_1D_1 = \frac{D'D_1'}{2}.$$

Nun ist aber

$$MD = r + e\cos(\omega - \alpha), \quad M_1D_1 = r_1 + e_1\cos(\omega_1 - \alpha_1),$$

$$D'D_1' = MD + M_1D_1 - MM_1 = e\cos(\omega - \alpha) + e_1\cos(\omega_1 - \alpha_1);$$

folglich ist:

$$AD = A_1D_1 = \frac{1}{2}\left\{e\cos(\omega - \alpha) + e_1\cos(\omega_1 - \alpha_1)\right\}$$

$$\rho = MA = MD - AD$$

$$= r + e\cos(\omega - \alpha) - \frac{1}{2}\left\{e\cos(\omega - \alpha) + e_1\cos(\omega_1 - \alpha_1)\right\}$$

$$= r\left\{1 + \frac{e\cos(\omega - \alpha) - e_1\cos(\omega_1 - \alpha_1)}{2r}\right\}$$

$$\rho_1 = M_1A_1 = M_1D_1 - A_1D_1$$

$$= r_1 + e_1\cos(\omega_1 - \alpha_1) - \frac{1}{2}\left\{e\cos(\omega - \alpha) + e_1\cos(\omega_1 - \alpha_1)\right\}$$

$$= r_1\left\{1 + \frac{e_1\cos(\omega_1 - \alpha_1) - e\cos(\omega - \alpha)}{2r_1}\right\}$$

Demgemäss ergiebt sich:

$$d\omega_1 = \frac{\rho}{\rho_1}\, d\omega = \frac{r}{r_1} \cdot \frac{1 + \frac{e}{2r}\cos(\omega - \alpha) - \frac{e_1}{2r}\cos(\omega_1 - \alpha_1)}{1 + \frac{e_1}{2r_1}\cos(\omega_1 - \alpha_1) - \frac{e}{2r_1}\cos(\omega - \alpha)} \cdot d\omega,$$

oder angenähert:

$$d\omega_1 = \frac{r}{r_1}\left\{1 + \frac{r + r_1}{2rr_1}\left[e\cos(\omega - \alpha) - e_1\cos(\omega_1 - \alpha_1)\right]\right\} d\omega$$

Da auf der rechten Seite dieser Gleichung $\cos(\omega_1 - \alpha_1)$ mit dem sehr kleinen Werth e_1 multiplizirt ist und sich ω_1 von $\omega_0 = \frac{r}{r_1}\omega$ nur durch einen gleichfalls sehr kleinen Werth unterscheidet, so darf ich schreiben:

$$d\omega_1 = \frac{r}{r_1}\left\{1 + \frac{r + r_1}{2rr_1}\left[e\cos(\omega - \alpha) - e_1\cos\left(\frac{r}{r_1}\omega - \alpha_1\right)\right]\right\}^{*)} d\omega.$$

Integrire ich nun, so erhalte ich:

$$\omega_1 = \frac{r}{r_1}\omega + \frac{r + r_1}{2r_1^2}\left[e\sin(\omega - \alpha) - e_1\frac{r_1}{r}\sin\left(\frac{r}{r_1}\omega - \alpha_1\right)\right] + C$$

$$= \frac{r}{r_1}\omega + \frac{r + r_1}{2rr_1^2}\left[er\sin(\omega - \alpha) - e_1 r_1\sin\left(\frac{r}{r_1}\omega - \alpha_1\right)\right] + C.$$

Für $\omega = 0$ ist $\omega_1 = 0$, daher:

$$C = \frac{r + r_1}{2rr_1^2}\left[er\sin\alpha - e_1 r_1\sin\alpha_1\right]$$

$$\omega_1 = \frac{r}{r_1}\omega + \frac{r + r_1}{2rr_1^2}\left[er\left\{\sin(\omega - \alpha) + \sin\alpha\right\} - e_1 r_1\left\{\sin\left(\frac{r}{r_1}\omega - \alpha_1\right) + \sin\alpha_1\right\}\right].$$

Wiederum bezeichne ω_0 den Winkel, um welchen sich Rad R_1 drehen muss, wenn die Räder zentrisch gelagert sind und R den $\angle\,\omega$ beschreibt. Dann ergiebt sich für den Drehungsfehler des getriebenen Rades die Grundgleichung:

11) $$\omega_1 - \omega_0 = \frac{r + r_1}{2rr_1^2}\left[er\left\{\sin(\omega - \alpha) + \sin\alpha\right\} - e_1 r_1\left\{\sin\left(\frac{r}{r_1}\omega - \alpha_1\right) + \sin\alpha_1\right\}\right].$$

Wenn sich die Räder aus einer beliebigen Stellung, in welcher AD und A_1D_1 die Winkel ω bezw. ω_1 mit MM_1 bilden, bis zur Berührungsstellung drehen, so möge R den $\angle\,x$, R_1 den $\angle\,x_1$ beschreiben. Die Strahlen AD und A_1D_1 befinden sich nunmehr in einer Stellung, in welcher sie mit MM_1 die $\angle\,\Omega$ bezw. Ω_1 einschliessen mögen. Dann ist $\omega = \Omega - x$, $\omega_1 = \Omega_1 - x_1$. Setze ich diese Werthe in Gleichung 11 ein, so erhalte ich eine neue Gleichung für die Drehungsfehler als Funktionen von Winkeln Ω, welche von der Berührungsstellung an gerechnet werden. Diese Gleichung ist lösbar für den Fall, dass ich im Stande bin, x und x_1 durch bekannte Grössen auszudrücken. Die Berührungstellung ist nun aber dadurch charakterisirt, dass $D'D_1' = 0$ wird, wofür ich schreiben kann:

$$e\cos(\omega - \alpha) + e_1\cos\left(\frac{r}{r_1}\omega - \alpha_1\right) = 0,$$

oder, da $\angle\,\omega$ im vorliegenden Fall nichts Anderes ist als $\angle\,x$:

12) $$e\cos(x - \alpha) + e_1\cos\left(\frac{r}{r_1}x - \alpha_1\right) = 0.$$

Daher ist x und somit auch x_1 durch bekannte Grössen auszudrücken.

Ist mir also gemäss den vorherigen Bezeichnungen eine Gleichung $f(\omega) = 0$

*) Diese Annäherung kann fehlerhaft werden, wenn ω sehr gross wird, weil die Vielfachen von π unter dem Cosinuszeichen fortfallen und die vernachlässigte Grösse nach vielen Umdrehungen gegenüber dem angenäherten Ausdruck zu sehr anwachsen kann.

und eine andere $f(\Omega) = 0$ gegeben, so kann ich beide zu einander in Beziehung setzen, da der eine Winkel von dem anderen in bekannter Weise abhängig ist.

Die Gleichung der von der Berührungsstellung an gerechneten Umdrehungsfehler erhalte ich auch dann, wenn ich die Integrationskonstante C für den Fall bestimme, dass für $\angle\, \omega = x$ $\angle\, \omega_1 = x_1$ ist, wobei sich die Werthe x und x_1 ebenfalls gemäss der transzendenten Gleichung 12) ergeben. Da die Auflösung derselben zu komplizirten Rechnungen führt, so begnüge ich mich mit der Andeutung der beiden vorhergehenden Methoden.

Um die charakteristischen Punkte der Kurve, welche durch die Grundgleichung dargestellt wird, zu ermitteln, kann ich für r/r_1 bestimmte Zahlenwerthe einsetzen. In den weiteren Entwicklungen handelt es sich dann im Allgemeinen um die Lösung von Gleichungen mindestens dritten Grades. Da dieselben nur für den Fall einfacher Räderübersetzung vermieden werden, so gehe ich im Folgenden von der Voraussetzung aus:

$$r/r_1 = 1.$$

Es seien nun zunächst die Werthe ω zu bestimmen, für welche der Drehungsfehler verschwindet. Zu dem Zwecke setze ich $\omega_1 - \omega_0 = 0$ und erhalte:

$$e\left\{\sin(\omega - \alpha) + \sin\alpha\right\} = e_1\left\{\sin(\omega - \alpha_1) + \sin\alpha_1\right\}$$

$$e\left\{\sin\omega\cos\alpha - \cos\omega\sin\alpha + \sin\alpha\right\} = e_1\left\{\sin\omega\cos\alpha_1 - \cos\omega\sin\alpha_1 + \sin\alpha_1\right\}$$

$$(e\cos\alpha - e_1\cos\alpha_1)\sqrt{1-\cos^2\omega} = (e\sin\alpha - e_1\sin\alpha_1)\cos\omega - (e\sin\alpha - e_1\sin\alpha_1)$$

$$(e\cos\alpha - e_1\cos\alpha_1)^2(1-\cos^2\omega) = (e\sin\alpha - e_1\sin\alpha_1)^2(\cos\omega - 1)^2$$

$$\cos^2\omega\left\{(e\sin\alpha - e_1\sin\alpha_1)^2 + (e\cos\alpha - e_1\cos\alpha_1)^2\right\} - 2(e\sin\alpha - e_1\sin\alpha_1)^2\cos\omega$$
$$= (e\cos\alpha - e_1\cos\alpha_1)^2 - (e\sin\alpha - e_1\sin\alpha_1)^2$$

$$\cos\omega = \frac{(e\sin\alpha - e_1\sin\alpha_1)^2}{(e\sin\alpha - e_1\sin\alpha_1)^2 + (e\cos\alpha - e_1\cos\alpha_1)^2}$$

$$\pm\sqrt{\frac{(e\sin\alpha - e_1\sin\alpha_1)^4}{[(e\sin\alpha - e_1\sin\alpha_1)^2 + (e\cos\alpha - e_1\cos\alpha_1)^2]^2} + \frac{(e\cos\alpha - e_1\cos\alpha_1)^2 - (e\sin\alpha - e_1\sin\alpha_1)^2}{(e\sin\alpha - e_1\sin\alpha_1)^2 + (e\cos\alpha - e_1\cos\alpha_1)^2}}$$

$$\cos\omega = \frac{(e\sin\alpha - e_1\sin\alpha_1)^2 \pm (e\cos\alpha - e_1\cos\alpha_1)^2}{(e\sin\alpha - e_1\sin\alpha_1)^2 + (e\cos\alpha - e_1\cos\alpha_1)^2}.$$

Führe ich zum Schluss statt dieses Winkels ω die Bezeichnung ω° ein, so ergiebt sich:

13) $$\cos\omega_1^\circ = 1.$$

13a) $$\cos\omega_2^\circ = \frac{(e\sin\alpha - e_1\sin\alpha_1)^2 - (e\cos\alpha - e_1\cos\alpha_1)^2}{(e\sin\alpha - e_1\sin\alpha_1)^2 + (e\cos\alpha - e_1\cos\alpha_1)^2}.$$

Ich reihe an diese Entwicklung die Bestimmung der Winkel ω an, für welche der Drehungsfehler ein Maximum bezw. Minimum wird. Zu dem Zweck setze ich den ersten Differentialquotienten der Gleichung $11 = 0$ und erhalte:

$$e\cos(\omega - \alpha) - e_1\cos(\omega - \alpha_1) = 0$$

$$e(\cos\omega\cos\alpha + \sin\omega\sin\alpha) = e_1(\cos\omega\cos\alpha_1 + \sin\omega\sin\alpha_1)$$

$$(e\cos\alpha - e_1\cos\alpha_1)\cos\omega = (e_1\sin\alpha_1 - e\sin\alpha)\sqrt{1-\cos^2\omega}$$

$$(e\cos\alpha - e_1\cos\alpha_1)^2\cos^2\omega = (e\sin\alpha - e_1\sin\alpha_1)^2(1-\cos^2\omega)$$

$$[(e\sin\alpha - e_1\sin\alpha_1)^2 + (e\cos\alpha - e_1\cos\alpha_1)^2]\cos^2\omega = (e\sin\alpha - e_1\sin\alpha_1)^2.$$

Führe ich schliesslich statt dieses Winkels ω die Bezeichnung ω' ein, so erhalte ich:

14) $$\cos\omega' = \pm \frac{e\sin\alpha - e_1\sin\alpha_1}{\sqrt{(e\sin\alpha - e_1\sin\alpha_1)^2 + (e\cos\alpha - e_1\cos\alpha_1)^2}}.$$

Entwickele ich statt des $\cos\omega_2{}^\circ$ den $\sin\omega_2{}^\circ$, so ist das Resultat gleichfalls ein eindeutiger Bruch. Hieraus folgt, dass von den beiden Winkeln zwischen 0 und 360°, für welche der $\cos\omega_2{}^\circ$ einen eindeutigen Werth hat, nur einer der Gleichung genügen kann. Die Kurve der Drehungsfehler schneidet also im Verlaufe der vollen Drehung nur zweimal die Nulllinie, nämlich einmal für $\omega_1{}^\circ = 0$ bezw. 360°, ein zweites Mal für $\omega_2{}^\circ$, und besitzt demgemäss ein Maximum und ein Minimum, entsprechend dem positiven und negativen Werthe für ω'.

Fig. 11.

Es ist leicht zu beweisen, dass $\cos\omega_2{}^\circ$ und $\cos\omega'$ für alle beliebigen Kombinationen von e, e_1, α und α_1 reell bleiben. Daher ist es ausgeschlossen, dass eine der genannten charakteristischen Punkte imaginär wird. Ein Spezialfall tritt nur dann ein, wenn sowohl die beiden Werthe für ω°, als auch die beiden Werthe für ω' je in einen einzigen zusammenfallen. Die Bedingung hierfür ist:

$$e\cos\alpha = e_1\cos\alpha_1.$$

In diesem Fall schneidet die Kurve zwischen 0 und 360° die Nulllinie nicht und besitzt ihre grösste Abweichung für $\omega = 180°$ (s. Fig. 11).

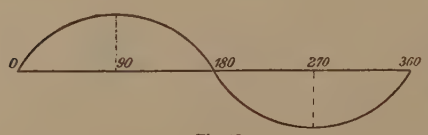

Fig. 12.

Die Bedingung $e\sin\alpha = e_1\sin\alpha_1$ erzeugt dagegen eine Kurve, welche die Abszissenaxe nach jeder halben Drehung schneidet und für $\omega = 90$ bezw. 270° die grösste Abweichung besitzt (s. Fig. 12).

Unter allgemeineren Voraussetzungen sind die beiden Aeste nicht symmetrisch; durch Verkleinerung des einen degenerirt die zweiästige Kurve (Fig. 12) schliesslich zu der einästigen (Fig. 11).

Mit einigen Spezialfällen will ich die Betrachtung der Kurve abschliessen.

Sei z. B. 1. $e = e_1$, so erhalte ich: $\cos\omega_1{}^\circ = +1$

$$\cos\omega_2{}^\circ = \frac{2\cos(\alpha+\alpha_1) - \cos 2\alpha - \cos 2\alpha_1}{2\{1-\cos(\alpha-\alpha_1)\}}$$

$$= \frac{2\cos(\alpha+\alpha_1) - 2\cos(\alpha+\alpha_1)\cos(\alpha-\alpha_1)}{2\{1-\cos(\alpha-\alpha_1)\}}$$

$$= \cos(\alpha+\alpha_1).$$

Ferner ergiebt sich:

$$\cos\omega' = \pm\frac{\sin\alpha - \sin\alpha_1}{\sqrt{2\{1-\cos(\alpha-\alpha_1)\}}} = \pm\frac{2\cos\frac{\alpha+\alpha_1}{2}\sin\frac{\alpha-\alpha_1}{2}}{2\sqrt{\frac{1-\cos(\alpha-\alpha_1)}{2}}}.$$

Da nun

$$\sin\frac{\alpha-\alpha_1}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos(\alpha-\alpha_1)}{2}}$$

ist, so folgt:

$$\cos\omega' = \pm\cos\frac{\alpha+\alpha_1}{2}.$$

2. Wenn die beiden Theilkreise sich berühren, so genügt $\angle\omega$, um welchen

sich das treibende Rad bis zur Berührungsstellung gedreht hat, wie oben festgestellt, der Gleichung:

$$e \cos(\omega - \alpha) + e_1 \cos\left(\frac{r}{r_1}\omega - \alpha_1\right) = 0.$$

Findet die Berührung schon in der Ausgangsstellung statt, also für $\omega = 0$, und ist ausserdem $e = e_1$, so lautet obige Gleichung:

$$\cos\alpha = -\cos\alpha_1,$$

oder je nachdem in diesem Fall

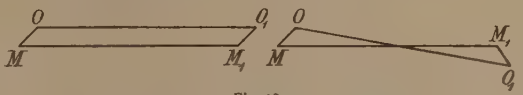

Fig. 13.

bei der Berührung der Theilkreise die Linien MM_1 und OO_1 parallel sind oder einander kreuzen (Fig. 13):

$$\sin\alpha = \pm \sin\alpha_1.$$

Sind die beiden Sinuswerthe gleichnamig, dann folgt:

$$\left.\begin{aligned}\cos\omega^\circ &= \pm 1\\ \cos\omega' &= 0\end{aligned}\right\} \text{ vgl. Fig. 12;}$$

sind sie ungleichnamig:

$$\cos\omega_1^\circ = +1,\ \cos\omega_2^\circ = -\cos 2\alpha,\ \cos\omega' = \mp\sin\alpha.$$

Ich gehe nun dazu über, für gewisse Spezialfälle diejenigen kleinsten Exzentrizitäten zu bestimmen, welche den kleinsten wahrnehmbaren Drehungsfehler d hervorrufen, und will zunächst annehmen, dass ausser $r = r_1$ auch $e = e_1$ ist. Dann lautet die Gleichung 11):

$$\begin{aligned}
d &= \frac{e}{r}\left\{\sin(\omega-\alpha) + \sin\alpha - \sin(\omega-\alpha_1) - \sin\alpha_1\right\}\\
&= \frac{e}{r}\left\{(\cos\alpha - \cos\alpha_1)\sin\omega + (\sin\alpha - \sin\alpha_1)(1-\cos\omega)\right\}\\
&= -\frac{2e}{r}\left\{\sin\frac{\alpha+\alpha_1}{2}\sin\frac{\alpha-\alpha_1}{2}\sin\omega - \sin\frac{\alpha-\alpha_1}{2}\cos\frac{\alpha+\alpha_1}{2}(1-\cos\omega)\right\}\\
&= \frac{4e}{r}\sin\frac{\alpha-\alpha_1}{2}\sin\frac{\omega}{2}\left\{\cos\frac{\alpha+\alpha_1}{2}\sin\frac{\omega}{2} - \sin\frac{\alpha+\alpha_1}{2}\cos\frac{\omega}{2}\right\}\\
&= \frac{4e}{r}\sin\frac{\alpha-\alpha_1}{2}\sin\frac{\omega}{2}\sin\frac{\omega-(\alpha+\alpha_1)}{2}.
\end{aligned}$$

Um die kleinsten Exzentrizitäten zu erhalten, nehme ich an, dass d der grösste Drehungsfehler sei, welcher erzeugt werden kann. Setze ich daher

$$\cos\omega = \pm\cos\frac{\alpha+\alpha_1}{2}$$

und bezeichne vorübergehend den Werth

$$\frac{4e}{r}\sin\frac{\alpha-\alpha_1}{2} \text{ mit } c, \text{ so ergiebt sich:}$$

$$\begin{aligned}
d &= c\sqrt{\frac{1\mp\cos\frac{\alpha+\alpha_1}{2}}{2}}\left\{\sqrt{\frac{1\mp\cos\frac{\alpha+\alpha_1}{2}}{2}}\cos\frac{\alpha+\alpha_1}{2} - \sqrt{\frac{1\pm\cos\frac{\alpha+\alpha_1}{2}}{2}}\sin\frac{\alpha+\alpha_1}{2}\right.\\
&= c\left\{\frac{1\mp\cos\frac{\alpha+\alpha_1}{2}}{2}\cos\frac{\alpha+\alpha_1}{2} - \sqrt{\frac{1-\cos^2\frac{\alpha+\alpha_1}{2}}{4}}\sin\frac{\alpha+\alpha_1}{2}\right\}\\
&= 2\frac{e}{r}\sin\frac{\alpha-\alpha_1}{2}\left\{\cos\frac{\alpha+\alpha_1}{2} \mp \cos^2\frac{\alpha+\alpha_1}{2} - \sin^2\frac{\alpha+\alpha_1}{2}\right\}.
\end{aligned}$$

Demgemäss existiren zwei verschiedene Werthe gleicher Exzentrizitäten,

welche den kleinsten Drehungsfehler als Maximum oder Minimum hervorrufen. Dieselben lauten:

15) $$e' = -\frac{dr}{2\sin\frac{\alpha-\alpha_1}{2}\left(1-\cos\frac{\alpha+\alpha_1}{2}\right)} = -\frac{dr}{4\sin\frac{\alpha-\alpha_1}{2}\sin^2\frac{\alpha+\alpha_1}{4}}.$$

16) $$e'' = \frac{dr}{2\sin\frac{\alpha-\alpha_1}{2}\left\{\cos(\alpha+\alpha_1)+\cos\frac{\alpha+\alpha_1}{2}\right\}} = \frac{dr}{4\sin\frac{\alpha-\alpha_1}{2}\cos\frac{3(\alpha+\alpha_1)}{4}\cos\frac{\alpha+\alpha_1}{4}}.$$

e' und e'' nehmen ihren kleinsten Werth an, wenn wir die im Nenner auftretenden Sinus- und Cosinuswerthe gleichzeitig zu ± 1 machen. Setzen wir ferner für d den Werth 0,00031 *mm* und für r den Werth 23 *mm* ein, so erhalten wir:

$$e' = e'' = \frac{dr}{4}\,(\text{absol.}) = 0{,}0018.$$

Unter der Voraussetzung des Vorhandenseins nur einer Exzentrizität und gleicher Theilkreisradien von je 23 *mm* habe ich im vorigen Theil dieser Arbeit festgestellt, dass e zur Erzeugung von $d = 0{,}00031$ *mm* mindestens $dr/2 = 0{,}00357$ *mm* betragen müsse. Somit ergiebt sich, dass zur Hervorbringung von d unter der Annahme von zwei gleich grossen Exzentrizitäten e und e_1 jede derselben nur halb so gross zu sein braucht wie der eine Werth e unter der Annahme nur einer Exzentrizität.

Nachdem ich d für den Fall gleicher Exzentrizitäten bestimmt habe, will ich nun von der Voraussetzung ausgehen, dass e und e_1 verschieden gross sind und dass dagegen α und α_1 in einem bestimmten Verhältniss zu einander stehen. Dieses sei dadurch bedingt, das sich die beiden Theilkreise in der Anfangstellung berühren, dass also

$$\cos\alpha = -\cos\alpha_1,\ \sin\alpha = \pm\sin\alpha_1 \text{ ist.}$$

Die Grundgleichung lautet für $r = r_1$:

$$dr = e\left\{\sin(\omega-\alpha)+\sin\alpha\right\} - e_1\left\{\sin(\omega-\alpha_1)+\sin\alpha_1\right\}$$
$$= e\left\{\sin\omega\cos\alpha - \cos\omega\sin\alpha\right\} - e_1\left\{\sin\omega\cos\alpha_1 - \cos\omega\sin\alpha_1\right\} + e\sin\alpha - e_1\sin\alpha_1.$$

Sei nun:

a) $$\cos\alpha = -\cos\alpha_1;\ \sin\alpha = -\sin\alpha_1,$$

so geht obige Gleichung in die folgende über:

$$dr = (e+e_1)\sin\omega\cos\alpha - (e+e_1)\cos\omega\sin\alpha + (e+e_1)\sin\alpha$$
$$= (e+e_1)\left\{\cos\alpha\sin\omega + \sin\alpha(1-\cos\omega)\right\}.$$

Um die kleinste Summe von Exzentrizitäten zu erhalten, welche d hervorruft, setze ich wiederum statt $\angle\,\omega$ den $\angle\,\omega'$ ein. Die Gleichung für letzteren Winkel lautet unter obiger Voraussetzung:

$$\cos\omega' = \frac{(e+e_1)\sin\alpha}{\pm\sqrt{(e+e_1)^2(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)}}$$
$$= \pm\sin\alpha.$$

Diesen beiden Werthen entsprechen, wie leicht zu beweisen ist, die Werthe:

$$\sin\omega' = \mp\cos\alpha.$$

Setze ich diese Ausdrücke in die Gleichung der Drehungsfehler ein, so ergiebt sich:

17) $$dr = (e+e_1)\left[\mp\cos^2\alpha + \sin\alpha(1\mp\sin\alpha)\right] = (e+e_1)(\pm 1 + \sin\alpha).$$

Ist $\sin\alpha = +1$ bez. -1, so wird

17a) $$e + e_1 = \pm\, dr/2.$$

Für den Fall nur einer Exzentrizität ergab sich die Gleichung:

$$e = \pm\, dr/2.$$

Somit ruft die Summe der Exzentrizitäten im ersten Fall den gleichen Drehungsfehler hervor wie die eine Exzentrizität e allein im zweiten Fall. Die Wirkungen von e und e_1 addiren sich also unter gewissen Voraussetzungen.

Machen wir nun dagegen die Annahme:

b) $$\cos\alpha = -\cos\alpha_1,\quad \sin\alpha = \sin\alpha_1.$$

Dann geht Gleichung 11 in die folgende über:

$$dr = (e + e_1)\sin\omega\cos\alpha - (e - e_1)\cos\omega\sin\alpha + (e - e_1)\sin\alpha.$$

Sei z. B. $\alpha = \pi/2$, so wird:

$$dr = (e - e_1)(1 - \cos\omega)$$

$$e - e_1 = \frac{dr}{1 - \cos\omega}.$$

Setze ich $\cos\omega = -1$, so erhält die Differenz $(e - e_1)$ ihren kleinsten Werth und es ergiebt sich:

18) $$(e - e_1) = dr/2.$$

Dieses Beispiel zeigt, wie sich die Wirkungen der Exzentrizitäten aufheben können, wie es also unter gewissen Verhältnissen gar nicht auf den absoluten Werth der Exzentrizitäten selbst, sondern nur auf ihre Differenz ankommt. Die letzten Rechnungen sollten hauptsächlich dazu dienen, die Hypothesen über die Wirkung mehrerer Exzentrizitäten zu erhärten, welche Leman am Schlusse seiner Arbeit in folgende Worte kleidet:

„Man sieht also, dass schon äusserst geringe Exzentrizitäten genügen, Fehler von der angegebenen Grösse zu erzeugen, und wird ... leicht ermessen können, bis zu welcher Grösse dieselben wachsen können, wenn man Exzentrizitäten in allen vier Rädern (des Bamberg'schen Apparats) annimmt, die sich zwar zum Theil in ihren Wirkungen aufheben, sich aber ebensowohl auch addiren können."

Um die Annahme zu stützen, dass der echte Bruch n ungefähr den Werth $^1/_2$ hat, fährt Leman fort: „Unter dieser Annahme verschwindet auch die scheinbare Willkür in der Wahl des Werthes n; denn es darf nicht vergessen werden, dass, wenn man in dem einen Rad eines Paares n grösser als $^1/_2$ annimmt, man es dafür im Partner um ebensoviel kleiner nehmen muss, und es ist leicht einzusehen, dass für den Totaleffekt beider Räder der gewählte Werth das günstigste Resultat ergiebt."

Diejenigen bisher besprochenen Kurven, für welche ich die charakteristischen Punkte bestimmt habe, haben die Eigenthümlichkeit gemeinsam, dass alle um die Abszisse 2π von einander entfernten Ordinaten gleich gross sind. Da sich also der Verlauf der Kurve, welcher sich in der ersten vollen Drehung ergiebt, in jeder folgenden wiederholt, so ist durch die Bestimmung der Drehungsfehler zwischen 0° und 360° das Aussehen der gesammten Kurve bekannt. Anders verhält es sich mit der in Gleichung 11) dargestellten Kurve für beliebige Räderübersetzung. Macht in diesem Fall das getriebene Rad nach einer Drehung um ω_1 einen bestimmten Fehler, so verändert sich dieser nach jeder vollen Drehung dieses Rades; er besitzt nach einer Anzahl von Drehungen seinen kleinsten Werth, wächst bis zu einem Maximum und kehrt wieder zu dem Anfangswerth zurück.

Sei z. B. der Fehler d für einen bestimmten Winkel ω_1 ausgedrückt durch die Gleichung:

$$d = \frac{r + r_1}{2 r r_1^2} \left[e r \left\{ \sin\left(\frac{r_1}{r}\,\omega_1 - \alpha\right) + \sin\alpha \right\} - e_1 r_1 \left\{ \sin(\omega_1 - \alpha_1) + \sin\alpha_1 \right\} \right],$$

so geht derselbe nach x weiteren vollen Drehungen von R_1 über in

$$d_1 = \frac{r + r_1}{2 r r_1^2} \left[e r \left\{ \sin\left(\frac{r_1}{r}\,2\pi x + \frac{r_1}{r}\,\omega_1 - \alpha\right) + \sin\alpha \right\} - e_1 r_1 \left\{ \sin(\omega_1 - \alpha_1) + \sin\alpha_1 \right\} \right].$$

Der Zuwachs des Fehlers nach x vollen Drehungen von R_1 beträgt also:

19) $$d_1 - d = \frac{(r + r_1)\,e}{2 r_1^2} \left\{ \sin\left(\frac{r_1}{r}\,2\pi x + \frac{r_1}{r}\,\omega_1 - \alpha\right) - \sin\left(\frac{r_1}{r}\,\omega_1 - \alpha_1\right) \right\}.$$

Die Werthe von x, für welche $d_1 - d = 0$ wird, und diejenigen Werthe, für welche diese Differenz zum Maximum bezw. Minimum wird, können hiernach bestimmt werden.

Es ist ersichtlich, dass die Form der Kurve eine verhältnissmässig komplizirte ist, von welcher ich nur das eine hervorhebe, dass die Maxima bezw Minima der einzelnen durch die Abszissenaxe begrenzten Aeste verschiedene Grösse besitzen und ihrerseits wiederum eine Kurve bilden, welche Maxima und Minima aufweist.

Da wir nun zur Bestimmung der kleinsten Exzentrizitäten, welche den kleinsten wahrnehmbaren Drehungsfehler d hervorrufen, im Vorhergehenden d zum Maximum machen mussten, und wir soeben fanden, dass für beliebige Räderübersetzung der Werth des Maximums der ersten Drehung durch die folgenden noch gesteigert werden kann, so gelangen wir leicht zu dem Schlusse, dass die Zahlenwerthe der kleinsten Exzentrizitäten in diesem Falle noch weit geringer ausfallen können als die von uns gefundenen.

Vergegenwärtigen wir uns schliesslich, dass bei den Schraubenschneideapparaten mitunter ausser den Zahnräderpaaren noch Herz und Mitnehmer gleichzeitig eine Rolle spielen, so ist leicht zu ermessen, durch wie geringe Abweichungen von der richtigen Lagerung der Axen und Zahnräder merkliche Fehler der Schraubengänge hervorgerufen werden können.

VITA.

Natus sum Julius Victor Werther Vratislaviae a. d. XIII. Cal. Sept. a. h. s. LXX patre Oscaro matre Dorothea e gente Munk. Litterarum elementis in gymnasio Sanctae Mariae Magdalenae Vratislaviensi imbutus maturitatis testimonium a. h. s. LXXXVIII accepi et per tres semestres Vratislaviae et Berolini in fabricis versabar. Artificiis usu perceptis primo Berolini tum Munichiae civibus academicis adscriptus studiis rerum technicarum per quater annos operam dedi. Magistri mei fuerunt doctissimi:

Burmester, Consentius, Dziobek, Geul, Grove, Hartmann, Hauck, de Haushofer, de Hoyer, Jacobsthal, Koch, Kossak (†), Lampe, Loewe, Ludewig, Paalzow, Pietsch, Prausnitz, Reuleaux, Rüdorff, Schmidt, Schroeter, Sohncke, Stoelzel, Ultsch, Voit.

Cum omnibus quos supra enumeravi viris illustrissimis tum professori praeclarissimo Boltzmann, qui optime est de me meritus, gratias ago quam maximas.

Buchdruckerei Otto Lange, Berlin C.